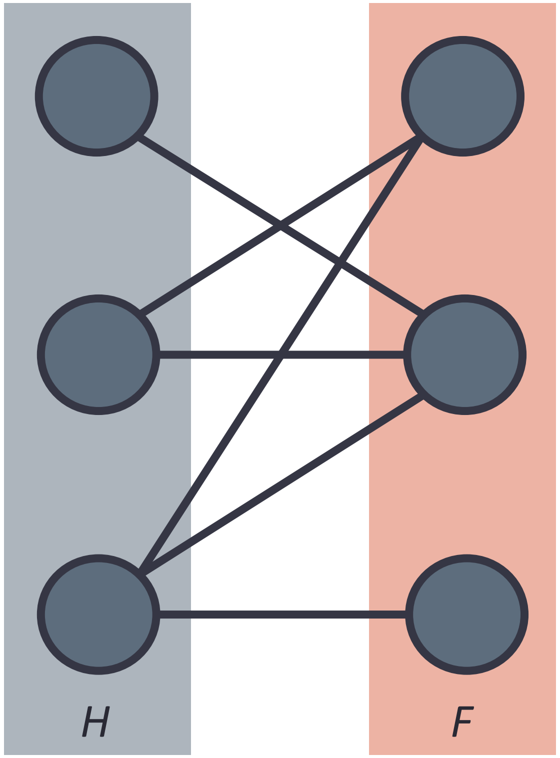
Un problème concret

- En moyenne, en France, qui des femmes ou des hommes ont plus de partenaires du sexe opposé ?
  - Une étude Novatris/Harris Interactive pour France 24 et L'Express (2007)
    - Le nombre moyen de partenaires pour les hommes est de 13.6, tandis qu'il est de seulement 8.5 pour les femmes, *i.e.* 60% moins (pour un panel de 963 personnes en France)
    - http://www.harrisinteractive.fr/news/2007/Lexpress_07262007.asp
  - Enquête de l'institut national de la santé et de la recherche médicale, INSERM (2006)
    - Les femmes ont déclaré 4.4 partenaires dans leur existence, contre 1.8 dans les années 1970 et 3.3 dans la dernière enquête de 1992. Il n'y a pas eu d'évolution chez les hommes par rapport à 1970 : ils déclarent en moyenne 11.6 partenaires, *i.e.* 163% plus (12,364 personnes interrogées)
    - http://www.orsnpdc.org/observation/195687_1intimite.pdf
  - Mais alors, qui est le plus proche de la vérité ? L'institut de sondage Novatris/Harris ou l'INSERM ?

Un problème concret

- Modélisons la situation à l'aide du graphe non orienté G
  - Soit H l'ensemble des hommes et F l'ensemble des femmes
  - Soit $V = H \cup F$ l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arrêtes
  - Soit le graphe $G = (V,E)$, dont un sous-graphe est dessiné ci-dessous



Un problème concret

- Modélisons la situation à l'aide du graphe non orienté G
  - Soit H l'ensemble des hommes et F l'ensemble des femmes
  - Soit $V = H \cup F$ l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arrêtes
  - Soit le graphe $G = (V,E)$

  - Donnée sur la population française (au 1er janvier 2015, selon l'INSEE)
    - Population masculine ($|H|$) ≈ 32.1 millions
    - Population féminine ($|F|$) ≈ 34.2 millions
    - Population totale ($|V|$) ≈ 66.3 millions

  - On connaît donc l'ensemble des sommets de G
    - Mais comment obtenir l'ensemble des arrêtes ?
    - En fait, nous n'avons besoin de connaître précisément E pour répondre à cette question !

Un problème concret

- Chaque arrête appartenant à E est incidente à exactement un sommet appartenant à l'ensemble H et un sommet appartenant à l'ensemble F
  - Cela signifie que la somme des degrés des sommets appartenant à H est égale au nombre d'arrêtes dans G, tout comme la somme des degrés des sommets appartenant à F est égale au nombre d'arrêtes dans G
  - On a donc la relation suivante

$$\sum_{h \in H} \text{degré}(h) = \sum_{f \in F} \text{degré}(f)$$

  - C'est-à-dire que la somme des degrés des sommets $\in H$ est égale à la somme des degrés des sommets $\in F$

Un problème concret

- Divisons chaque côté de cette équation par le produit de la cardinalité des ensembles *F* et *H*
  - On obtient ceci

$$\frac{\sum_{h \in H} \text{degré}(h)}{|H| \cdot |F|} = \frac{\sum_{f \in F} \text{degré}(f)}{|H| \cdot |F|}$$

$$\frac{\sum_{h \in H} \text{degré}(h)}{|H|} \cdot \frac{1}{|F|} = \frac{\sum_{f \in F} \text{degré}(f)}{|F|} \cdot \frac{1}{|H|}$$

  - On remarque que
    - $\frac{\sum_{h \in H} \text{degré}(h)}{|H|}$ est le degré moyen d'un sommet appartenant à *H*

Un problème concret

- Divisons chaque côté de cette équation par le produit de la cardinalité des ensembles *F* et *H*
  - On obtient ceci

$$\frac{\sum_{h\in H}\text{degré}(h)}{|H|\cdot|F|} = \frac{\sum_{f\in F}\text{degré}(f)}{|H|\cdot|F|}$$

$$\frac{\sum_{h\in H}\text{degré}(h)}{|H|}\cdot\frac{1}{|F|} = \frac{\sum_{f\in F}\text{degré}(f)}{|F|}\cdot\frac{1}{|H|}$$

  - On remarque que
    - $\frac{\sum_{f\in F}\text{degré}(f)}{|F|}$ est le degré moyen d'un sommet appartenant à *F*

Un problème concret

- On déduit donc de l'équation suivante

$$\frac{\sum_{h \in H} \text{degré}(h)}{|H|} \cdot \frac{1}{|F|} = \frac{\sum_{f \in F} \text{degré}(f)}{|F|} \cdot \frac{1}{|H|}$$

  - Qu'un homme français a en moyenne $|F|/|H|$ plus de partenaires du sexe opposé qu'une femme française

- Donc, en France, d'après cette modélisation simpliste, un homme aurait en moyenne, environ 6.5% plus de partenaires du sexe opposé qu'une femme
  - Le nombre moyen de partenaires du sexe opposé est déterminé uniquement par le ratio entre le nombre d'hommes et de femmes

Un problème concret

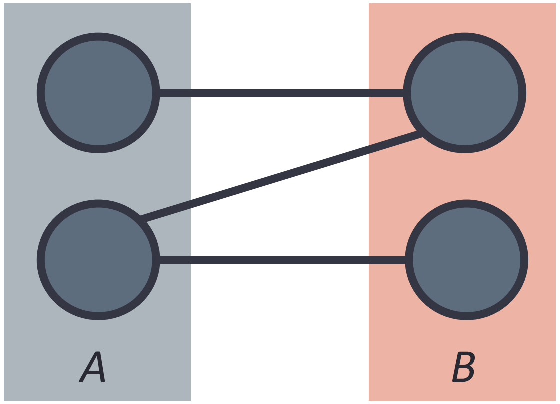
- En moyenne, en France, qui des femmes ou des hommes ont plus de partenaires du sexe opposé ?
  - En développant un modèle simple fondé sur un graphe non orienté, on constate que le nombre moyen de partenaires du sexe opposé est déterminé uniquement par le ratio entre le nombre d'hommes et de femmes (ratio de 1,065 en France)
  - Les résultats obtenus par le cabinet de sondage Novatris/Harris (différence de 60% entre hommes et femmes) et l'INSERM (163% de différence entre hommes et femmes) semblent plutôt éloignés de la réalité
    - Malgré de vaste enquêtes (plusieurs dizaines de milliers de personnes interrogées à chaque fois)
    - Les hommes ont-ils menti et déclaré plus de partenaires ?
    - Les femmes ont-elles menti et déclaré moins de partenaires ?

Concepts illustrés par ce problème

- Lemme des poignées de main
  - La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté $G = (V,E)$ est égale à deux fois le nombre d'arrêtes

$$\sum_{v \in V} \text{degré}(v) = 2\,|E|$$

- Graphe biparti
  - Un graphe $G = (V,E)$ est dit biparti s'il existe une partition de l'ensemble de ses sommets V en deux sous-ensembles A et B, telle que
    - Pour tout lien $e = (v_i,v_j) \in E$, on a soit $v_i \in A$ et $v_j \in B$, soit $v_i \in B$ et $v_j \in A$



Exercice

- Lors d'une conférence, les participants se serrent les mains les un les autres (une seule fois avec la même personne). Chaque conférencier retient le nombre de mains qu'il a serrées.
  - Montrez qu'il y a au moins 2 personnes ayant serré le même nombre de mains
  - Montrez que le nombre total de mains serrées est pair
  - Pouvez-vous en déduire que le nombre de participants ayant serré un nombre impair de mains est pair ?

Exercice

- Lors d'une conférence, les participants se serrent les mains les un les autres (une seule fois avec la même personne). Chaque conférencier retient le nombre de mains qu'il a serrées.

- Modélisons la situation à l'aide d'un graphe
  - C'est un graphe non orienté simple, $|V|$ = le nombre de conférenciers
  - Montrer qu'il y a au moins deux personnes ayant serré le même nombre de mains revient à montrer qu'il y a au moins deux sommets ayant le même degré
  - Le degré d'un sommet appartient à l'intervalle $[0;n\text{-}1]$. Si chaque sommet a un degré différent, alors il existe un sommet de degré 0, un sommet de degré 1, … et un sommet de degré n-1.
  - Or, il ne peut y avoir de sommet de degré n-1 (*i.e.* connectés à tous les autres sommets) si un des sommets à un degré égal à 0.

Exercice

- Lors d'une conférence, les participants se serrent les mains les un les autres (une seule fois avec la même personne). Chaque conférencier retient le nombre de mains qu'il a serrées.

- Modélisons la situation à l'aide d'un graphe
  - C'est un graphe non orienté simple, $|V|$ = le nombre de conférenciers
  - D'après le lemme des poignées de main, le nombre total de mains serrées est pair
    - Le nombre total de mains serrées correspond à la somme de tous les degrés

$$\sum_{v \in V} \text{degré}(v) = 2\,|E|$$

Exercice

- Lors d'une conférence, les participants se serrent les mains les un les autres (une seule fois avec la même personne). Chaque conférencier retient le nombre de mains qu'il a serrées.

- Modélisons la situation à l'aide d'un graphe
  - C'est un graphe non orienté simple, $|V|$ = le nombre de conférenciers
  - Montrer que le nombre de participants ayant serré un nombre impair de mains est pair revient à montrer que le nombre de sommets de degré impair est pair
  - Partitionnons l'ensemble V en deux sous-ensembles V_{pairs} et $V_{impairs}$ contenant respectivement l'ensemble des sommets de degré pair et l'ensemble des sommets de degré impair…

Exercice

- Lors d'une conférence, les participants se serrent les mains les un les autres (une seule fois avec la même personne). Chaque conférencier retient le nombre de mains qu'il a serrées.

- Modélisons la situation à l'aide d'un graphe
  - C'est un graphe non orienté simple, $|V|$ = le nombre de conférenciers
  - On a la relation suivante

$$\sum_{v \in V} \text{degré}(v) = \sum_{v_{pair} \in V_{pairs}} \text{degré}(v_{pair}) + \sum_{v_{impair} \in V_{impairs}} \text{degré}(v_{impair})$$

  - Or, on sait que $\sum_{v \in V} \text{degré}(v)$ est pair et que $\sum_{v_{pair} \in V_{pairs}} \text{degré}(v_{pair})$ est pair
  - On déduit donc que $\sum_{v_{impair} \in V_{impairs}} \text{degré}(v_{impair})$ est pair, ce qui implique que le nombre de sommets impairs est pair

Représentation d’un graphe

- Il existe deux principales manières de décrire la structure d’un graphe dans un programme informatique
  - Avec une matrice d’adjacence

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1	0	1	1	1
4	0	0	1	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	1	1	0	1	0

  - Avec des listes d’adjacences

0 →	0	1	4	6			
1 →	3						
2 →	0	1	3	4	6		
3 →	0	1	2	4	5	6	
4 →	2	5					
5 →	0	1	2	3	4	5	6
6 →	2	3	5				

Représentation d'un graphe

- Représentation par matrice d'adjacence
  - Soit un graphe $G = (V,E)$ d'ordre n
    - Tel que $V =(0,1,2,3,\ldots,n\text{-}1)$ *i.e.* les sommet sont numérotés de 0 à n-1
  - On le représente à l'aide d'une matrice carrée A de taille n x n, telle que
    - $A[\, i \,][\, j \,] = 1$ si $(i,j) \in E$
    - $A[\, i \,][\, j \,] = 0$ si $(i,j) \notin E$

  - Par exemple, pour le graphe graphe orienté $G_o = (V_o,E_o)$ on a
    - $A_0 =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1	0	1	1	1
4	0	0	1	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	1	1	0	1	0

Représentation d'un graphe

- Représentation par matrice d'adjacence
  - Soit un graphe $G = (V,E)$ d'ordre n
    - Tel que V =(0,1,2,3,...,n-1) *i.e.* les sommet sont numérotés de 0 à n-1
  - On le représente à l'aide d'une matrice carrée A de taille n x n, telle que
    - $A[\ i\ ][\ j\ ] = 1$ si $(i,j) \in E$
    - $A[\ i\ ][\ j\ ] = 0$ si $(i,j) \notin E$

  - Si G est un graphe non orienté, par définition, le lien (i,j) et le lien (j,i) définissent une seule et même arrête
    - Par conséquent, la matrice d'adjacence A est symétrique par rapport à sa diagonale principale
    - On peut donc par exemple se contenter de la composante triangulaire supérieure de la matrice d'adjacence

Représentation d'un graphe

- Représentation par matrice d'adjacence
  - Soit un graphe $G = (V,E)$ d'ordre n
    - Tel que $V =(0,1,2,3,\ldots,n\text{-}1)$ *i.e.* les sommet sont numérotés de 0 à n-1
  - On le représente à l'aide d'une matrice carrée A de taille n x n, telle que
    - $A[\,i\,][\,j\,] = 1$ si $(i,j) \in E$
    - $A[\,i\,][\,j\,] = 0$ si $(i,j) \notin E$
  - Par exemple, pour le graphe graphe non orienté $G_{no} = (V_{no},E_{no})$ on a
    - A_{no} =

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0

les cellules colorées décrivent la diagonale principale

Représentation d'un graphe

- Représentation par matrice d'adjacence
  - Étant donné un graphe *G* décrit par sa matrice d'adjacence *A*
    - Pour savoir si l'arc ou l'arrête (*i,j*) existe dans *G,* il suffit de consulter la valeur de la cellule *A*[*i*][*j*]
    - Pour connaître le voisinage ou le degré d'un sommet, il faut consulter une ligne ou une colonne entière
  - Par exemple, si on considère la matrice d'adjacence ci-dessous
    - *A* =

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1	0	1	1	1
4	0	0	1	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	1	1	0	1	0

degré-entrant(2) = 4 et degré-sortant(2) = 5