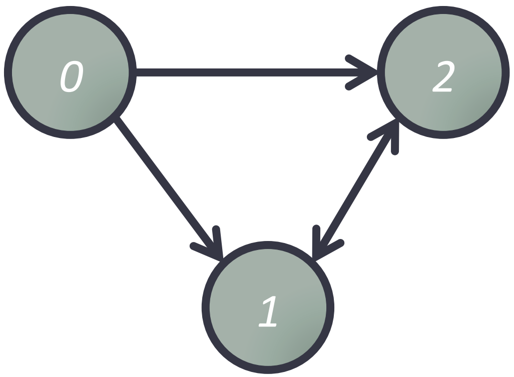
# Parcourir un graphe

- Soit un graphe orienté $G = (V,E)$
- Un **chemin** du sommet $v_0$ vers le sommet $v_k$ est une séquence de sommets $<v_0,v_1,\ldots,v_k>$ tels que
  - $v_i \in V$, $i \in [0 ; k]$
  - $(v_{i-1},v_i) \in E$, $i \in [1 ; k]$, autrement dit, l'arc $v_{i-1} \rightarrow v_i$ est présent dans le graphe $G$
- La longueur d'un chemin désigne le nombre d'arc qu'il comporte

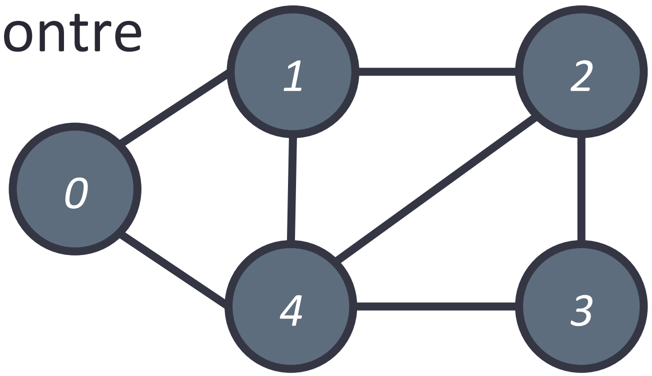
- Par exemple, étant donné le graphe ci-contre
  - <0,1,2> est un chemin de longueur 2
  - <2,1> est un chemin de longueur 1
  - <2,1,0> n'est pas un chemin car $(1,0) \notin E$



# Parcourir un graphe

- Soit un graphe non orienté $G = (V,E)$
- Une **chaîne** du sommet $v_0$ vers le sommet $v_k$ est une séquence de sommets $<v_0,v_1,\ldots,v_k>$ tels que
  - $v_i \in V, i \in [0\ ;k]$
  - $(v_{i-1},v_i) \in E,\ i \in [1\ ;k]$, autrement dit, l'arrête $v_{i-1}$ — $v_i$ est présente dans le graphe $G$
- La longueur d'une chaîne désigne le nombre d'arrêtes qu'elle comporte

- Par exemple, étant donné le graphe ci-contre
  - <0,1,2,3> est une chaîne de longueur 3
  - <4,1,2> est une chaîne de longueur 2
  - <1,3,2> n'est pas une chaîne car $(1,3) \notin E$



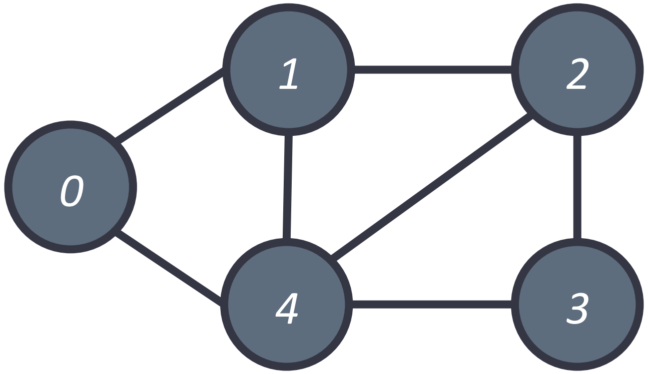
# Parcourir un graphe

- S'il existe dans un graphe orienté un chemin du sommet *a* vers le sommet *b*, alors *b* est **accessible** depuis *a*
- S'il existe dans un graphe non orienté une chaîne de *a* à *b*, *a* est **accessible** depuis *b*, et b est **accessible** depuis *a*

- Chaînes et chemins particuliers
  - Soit une séquence $<v_0,v_1,\ldots,v_k>$ telle que les sommets $v_1$, $v_2$, ... $v_k$ soient tous distincts
    - Cette séquence définit un chemin ou une chaîne **élémentaire**
  - Soit une séquence $<v_0,v_1,\ldots,v_k>$ telle que $v_0 = v_k$ et $k > 0$
    - Dans le cas d'un graphe orienté, ce chemin forme un **circuit**
    - Dans le cas d'un graphe non orienté, cette chaîne forme un **cycle**

# Parcourir un graphe

- S'il existe un chemin (resp. chaîne) de *a* vers *b*, alors il existe aussi un chemin (resp. chaîne) élémentaire de *a* vers *b*
- Soit le graphe ci-dessous




  - <0,1,4,0,1,2> est une chaîne
  - <0,1,2> est une chaîne élémentaire
  - <0,1,2> n'est pas un cycle
  - <0,4,1,2,3,4,0> est un cycle
  - <0,1,2,3,4,0> est un cycle élémentaire

# Parcourir un graphe

- La matrice d'adjacence $A$ d'un graphe est telle que
  - Si A[i][j] = 1, alors $(i,j) \in E$
  - *i.e.* A[i][j] = 1 indique l'existence d'un chemin ou d'une chaîne de longueur égale à 1, du sommet *i* au sommet *j*
- La matrice d'adjacence $A$ décrit tous les chemins ou chaînes de longueur égale à 1
- La matrice $A^k$, *i.e.* la matrice résultant du produit a $A$ par elle-même $k$ fois, décrit tous les chemins ou chaînes de longueur égale à $k$
  - Soit $k = 2$. S'il existe un chemin (resp. chaîne) de longueur 2 entre les sommets *i* et *j*, alors il existe un sommet *o*, tel qu'il existe un chemin (resp. chaîne) de longueur 1 entre *i* et *o*, et un chemin (resp. chaîne) de longueur 1 entre *o* et *j*

# Parcourir un graphe

- La matrice d'adjacence $A$ d'un graphe est telle que
  - Si A[i][j] = 1, alors $(i,j) \in E$
  - *i.e.* A[i][j] = 1 indique l'existence d'un chemin ou d'une chaîne de longueur égale à 1, du sommet $i$ au sommet $j$
- La matrice d'adjacence $A$ décrit tous les chemins ou chaînes de longueur égale à 1
- La matrice $A^k$, *i.e.* la matrice résultant du produit a $A$ par elle-même $k$ fois, décrit tous les chemins ou chaînes de longueur égale à $k$
  - Soit $k = 2$. On doit donc avoir $A[i][o] = 1$ et $A[o][j] = 1$, *i.e.* le coefficient 1 apparaît à la même position dans la ligne $i$ et la colonne $j$

# Parcourir un graphe

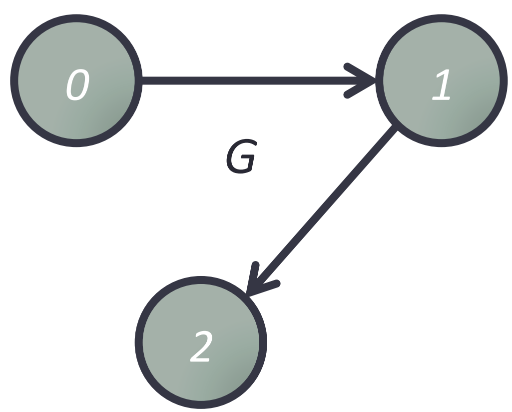
- La matrice $A^k$, *i.e.* la matrice résultant du produit a $A$ par elle-même $k$ fois, décrit tous les chemins ou chaînes de longueur égale à $k$

- Soit le graphe $G = (V,E)$ d'ordre 3, décrit par la matrice d'adjacence $A$ ci-après
  - $A = \begin{array}{c|ccc|} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$
  - $A^2 =$

# Parcourir un graphe

- La matrice $A^k$, *i.e.* la matrice résultant du produit a $A$ par elle-même $k$ fois, décrit tous les chemins ou chaînes de longueur égale à $k$

- Soit le graphe $G = (V,E)$ d'ordre 3, décrit par la matrice d'adjacence $A$ ci-après
  - $A = \begin{array}{c|c|c|c|} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$
  - $A^2 = \begin{array}{c|c|c|c|} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$

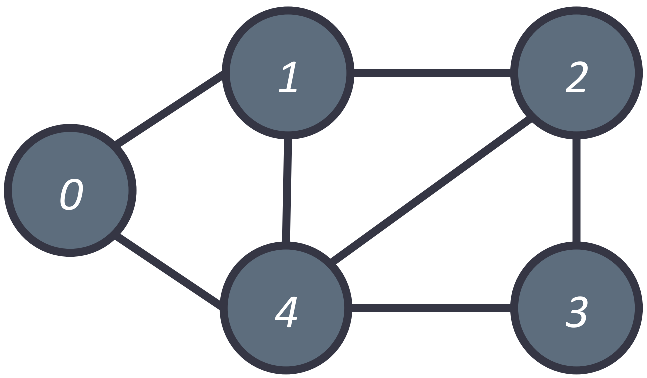


# Parcourir un graphe

- En additionnant $A + A^2$ on obtient les chemins/chaînes de longueurs inférieures ou égales à 2
- En additionnant $A + A^2 + A^3$ on obtient les chemins/chaînes de longueurs inférieures ou égales à 3, *etc.*
- En additionnant les puissances successives de la matrice d'adjacence d'un graphe $G = (V,E)$, on obtient la **fermeture transitive** de ce graphe, $G^f = (V,E^f)$
  - $G$ et $G^f$ ont le même ensemble de sommets
  - $G^f = (V,E^f)$ est tel que $\forall (v_i,v_j) \in V^2$, $(v_i,v_j) \in E^f$ si $v_j$ est accessible depuis $v_i$
  - Il s'agit d'additionner les matrices $A$, $A^2$, …, $A^k$, jusqu'à ce que
  - $A + A^2 + \ldots + A^k = A + A^2 + \ldots + A^k + A^{k+1}$ *i.e.* on n'ajoute pas de nouveau chemin/nouvelle chaîne (aucun coefficient de la matrice ne passe d'une valeur nulle à une valeur supérieure ou égale à 1)

# Parcourir un graphe

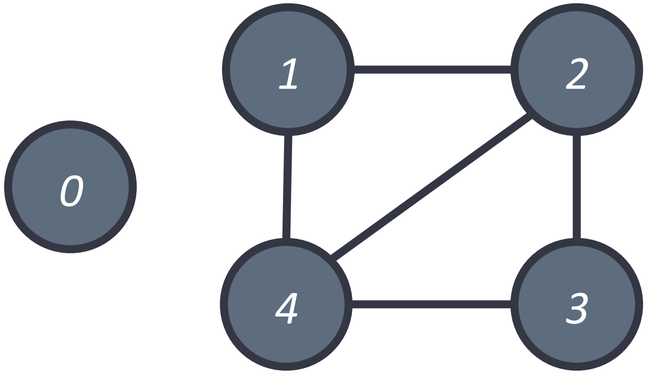
- Un graphe non orienté $G$ = ($V$,$E$) est **connexe** si
  - $\forall (v_i, v_j) \in V^2$, $v_i \neq v_j$, il existe une chaîne de $v_i$ à $v_j$
  - C'est-à-dire que tout sommet est accessible à partir de n'importe quel autre sommet




- Par exemple, le graphe représenté ci-dessus est connexe

# Parcourir un graphe

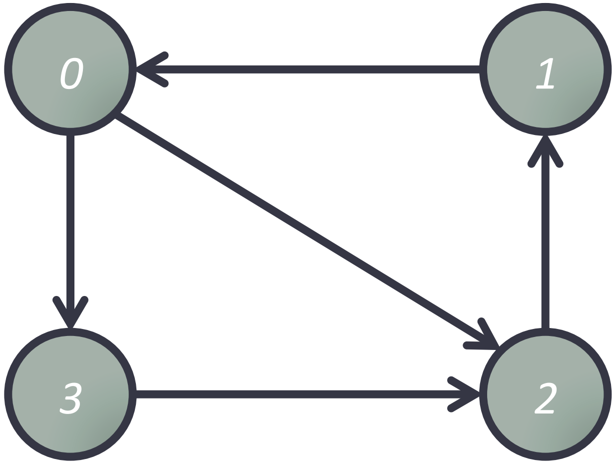
- Un graphe non orienté $G = (V,E)$ est **connexe** si
  - $\forall (v_i,v_j) \in V^2$ , $v_i \neq v_j$ , il existe une chaîne de $v_i$ à $v_j$
  - C'est-à-dire que tout sommet est accessible à partir de n'importe quel autre sommet




  - Par exemple, le graphe représenté ci-dessus n'est pas connexe

# Parcourir un graphe

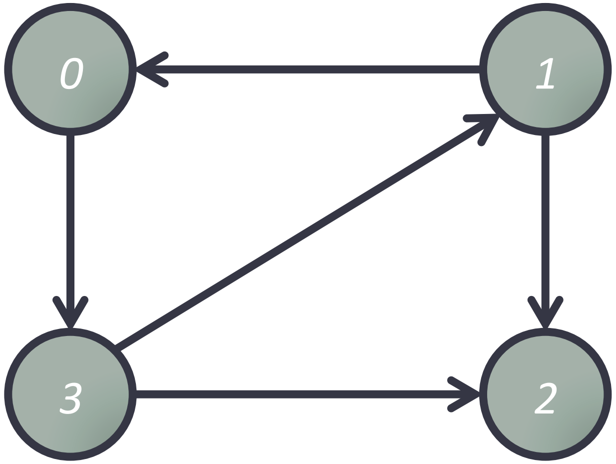
- Un graphe orienté $G = (V,E)$ est **fortement connexe** si
  - $\forall (v_i,v_j) \in V^2$ , $v_i \neq v_j$ , il existe un chemin de $v_i$ à $v_j$
  - C'est-à-dire que tout sommet est accessible à partir de n'importe quel autre sommet




  - Par exemple, le graphe représenté ci-dessus est fortement connexe

# Parcourir un graphe

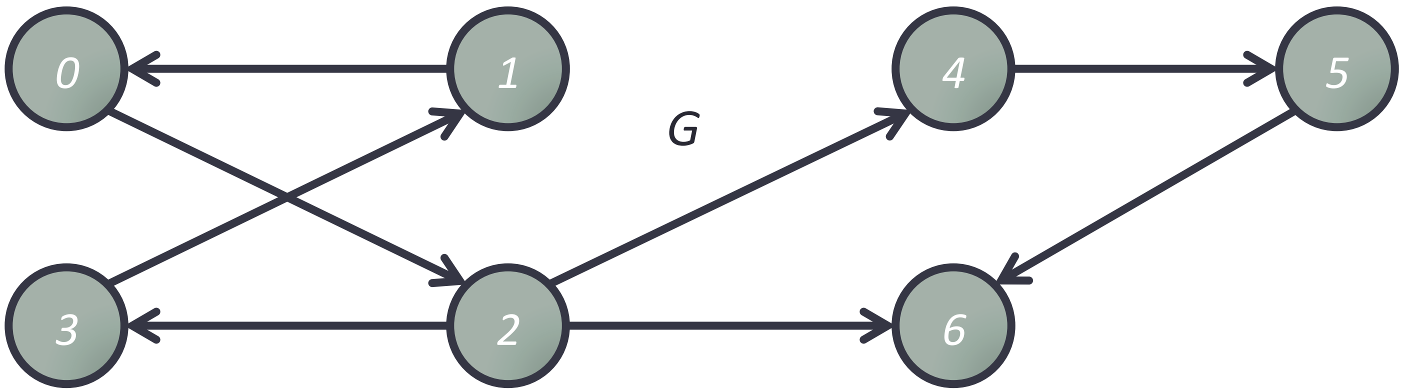
- Un graphe orienté $G = (V,E)$ est **fortement connexe** si
  - $\forall (v_i,v_j) \in V^2$, $v_i \neq v_j$, il existe un chemin de $v_i$ à $v_j$
  - C'est-à-dire que tout sommet est accessible à partir de n'importe quel autre sommet




  - Par exemple, le graphe représenté ci-dessus n'est pas fortement connexe

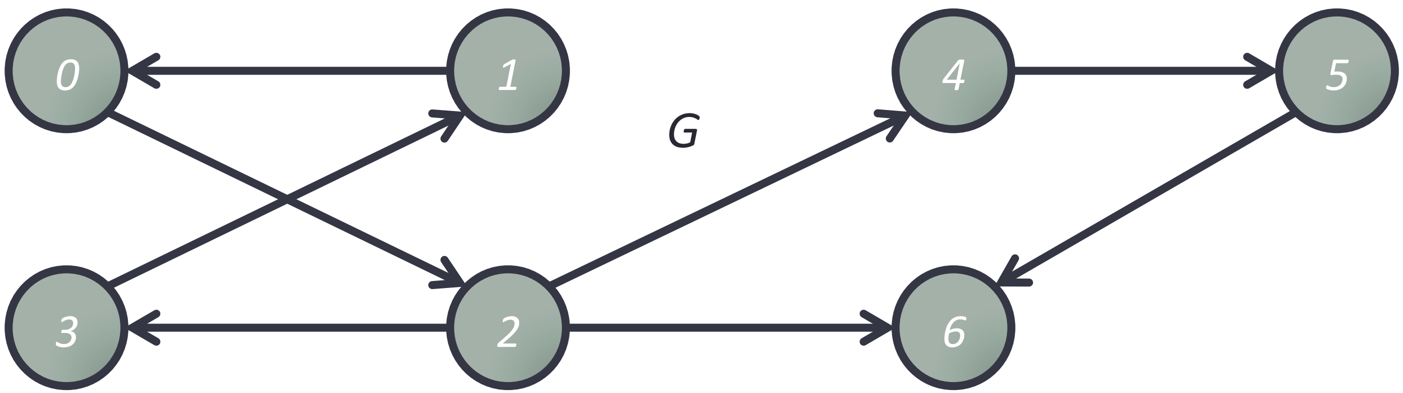
# Exercice

- Calculez la fermeture transitive du graphe orienté d'ordre 7, *G*, dessiné ci-dessous



# Exercice

- Calculez la fermeture transitive du graphe orienté d'ordre 7, *G*, dessiné ci-dessous

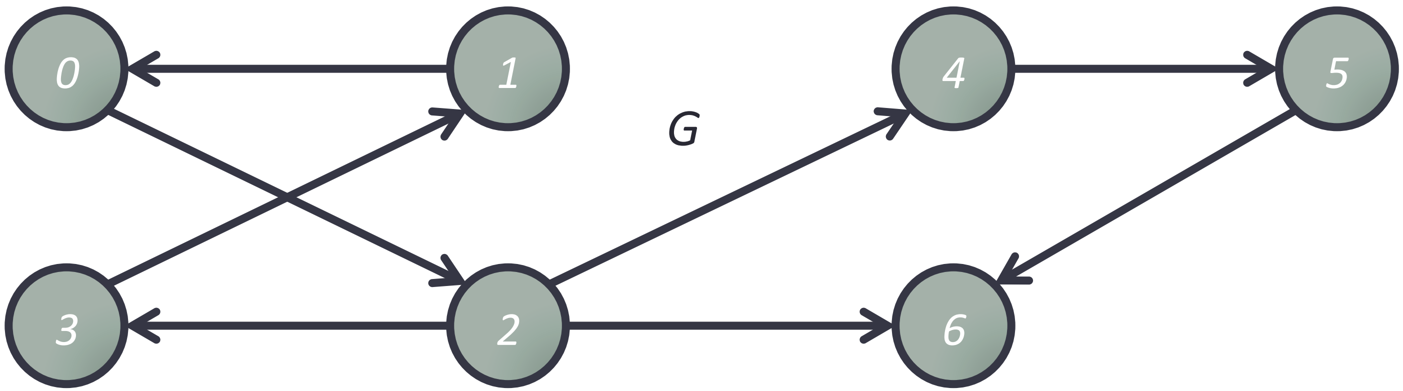



$A^f =$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Exercice

- Calculez la fermeture transitive du graphe orienté d'ordre 7, *G*, dessiné ci-dessous




- La fermeture transitive de *G* est décrite par $A^f = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$
- On constate que tous les sommets sont accessibles depuis les sommets 0, 1, 2 et 3, mais qu'aucun sommet n'est accessible depuis le sommet 6
- Le graphe *G* n'est pas fortement connexe