Modéliser les conflits dans un réseau social

- Dans les années 70, l'anthropologue Wayne W. Zachary s'intéresse à la modélisation et à la prévision des conflits et des scission au sein de petits groupes de personnes

  - D'abord, il suppose qu'un groupe de personnes peut être décrit par un réseau social, *i.e.* un graphe non orienté dont les sommets correspondent aux personnes et dont les arrêtes décrivent les interactions entre personnes

  - Ensuite, il suppose que les conflits et les scissions au sein d'un groupe sont dus à une communication « déséquilibrée » au sein du groupe, *i.e.* toutes les paires de personnes n'échangent pas autant d'information entre elles

Modéliser les conflits dans un réseau social

- Dans les années 70, l'anthropologue Wayne W. Zachary s'intéresse à la modélisation et à la prévision des conflits et des scission au sein de petits groupes de personnes

  - Il part du principe que la quantité d'information qu'échangent deux membres d'un groupe de personnes dépend des dans lesquels elles interagissent. Plus précisément, il affirme que la quantité d'information qu'échangent deux personnes est une fonction linéaire du nombre de contextes dans lesquels elles interagissent.

  - Ces quantités connues, il formule alors les tâches de modélisation et de prévision des conflits au sein d'un groupe comme un problème de **flot maximal** et de recherche de **coupe minimale** dans le graphe décrivant le réseau

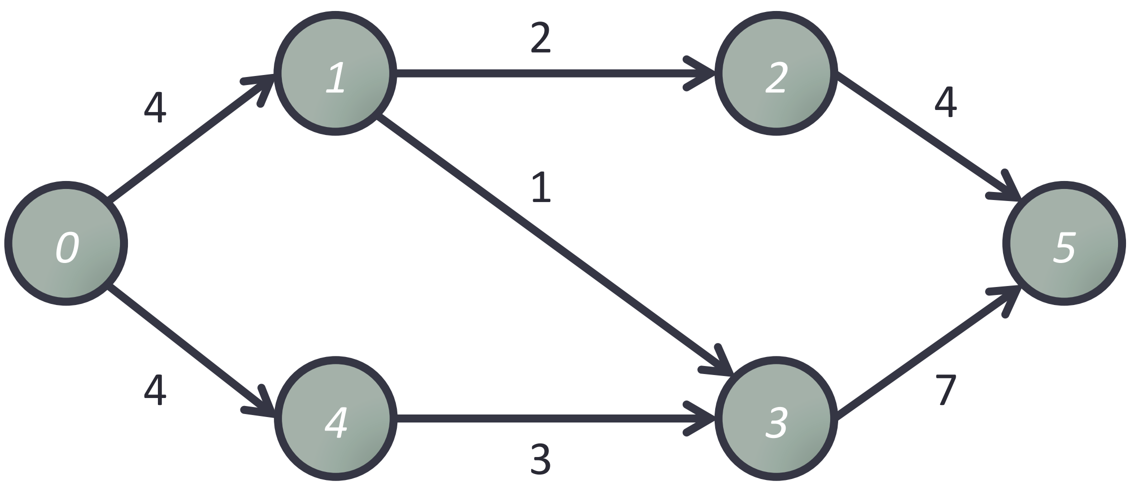
Modéliser les conflits dans un réseau social

- Dans les années 70, l’anthropologue Wayne W. Zachary s’intéresse à la modélisation et à la prévision des conflits et des scission au sein de petits groupes de personnes

- Ces travaux sont décrits dans l’article intitulé « An Information Flow Model for Conflict and Fission in Small Groups » qu’il publie en 1977 dans le « Journal of Anthropological Research »
  - L’article original est disponible sur le bureau virtuel
  - Les données sont également disponibles du le bureau virtuel

Problème de flot maximal dans un graphe

- Étant donné un graphe orienté $G = (V,E)$, on s'intéresse à l'écoulement d'un **flot** (*e.g.* un flot d'information) depuis un sommet **source**, $s \in V$, jusqu'à un sommet appelé **puits**, $p \in V$
- La fonction $c : V^2 \rightarrow R^+$ associe à chaque arc une **capacité**
  - Si $(v_i,v_j) \notin E$, $c(v_i,v_j) = 0$



  - Pour le graphe ci-dessus, on a par exemple $c(0,1) = 4$ et $c(0,2) = 0$

Problème de flot maximal dans un graphe

- Étant donné un graphe orienté $G = (V,E)$, on s'intéresse à l'écoulement d'un **flot** (*e.g.* un flot d'information) depuis un sommet **source**, $s \in V$, jusqu'à un sommet appelé **puits**, $p \in V$

- Un flot s—p est une fonction $f : V^2 \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes
  - Compatibilité avec c

    $$\forall (v_i,v_j) \in V^2,\ f(v_i,v_j) \leq c(v_i,v_j)$$
  - Conservation de flot

    $$\forall v_i \in V \setminus \{s,p\},\ \sum_{(v_i,v_j) \in \delta^+(v_i)} f(v_i,v_j) = \sum_{(v_k,v_i) \in \delta^-(v_i)} f(v_k,v_i)$$, $\delta^+(v_i)$ et $\delta^-(v_i)$ désignant respectivement l'ensemble des arcs sortants et entrants en v_i

Problème de flot maximal dans un graphe

- Étant donné un graphe orienté $G = (V,E)$, on s'intéresse à l'écoulement d'un **flot** (*e.g.* un flot d'information) depuis un sommet **source**, $s \in V$, jusqu'à un sommet appelé **puits**, $p \in V$

- Étant donné un flot s—p décrit par $f : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, on peut mesurer
  - La **capacité résiduelle d'un arc** $(v_i,v_j) \in E$

    $c_f(v_i,v_j) = c(v_i,v_j) - f(v_i,v_j)$
  - La **capacité résiduelle d'un chemin** $ch = <v_0,v_1,\ldots v_k>$

    $c_f(ch) = \min(c_f(v_i,v_{i+1})),\ i \in [0;k\text{-}1]$
- On obtient aussi le **graphe résiduel** $G_f = (V,E_f)$ qui ne comporte que les arc ayant une capacité résiduelle non nulle
  - $E_f = \{(v_i,v_j) \in E \text{ tq } c_f(v_i,v_j) > 0\}$

Problème de flot maximal dans un graphe

- Étant donné un graphe orienté $G = (V,E)$, on s'intéresse à l'écoulement d'un **flot** (*e.g.* un flot d'information) depuis un sommet **source**, $s \in V$, jusqu'à un sommet appelé **puits**, $p \in V$

- La valeur d'un flot, $|f|$, est la somme des flots entrants au puits
  - $$|f| = \sum_{(s,v_j) \in \delta^+(s)} f(s,v_j) = \sum_{(v_k,p) \in \delta^-(p)} f(v_k,p)$$

- Le problème de flot maximal consiste à déterminer la plus grande quantité pouvant circuler à travers le graphe depuis la source vers le puits. Cela revient à trouver le flot f^* maximisant la valeur du flot
  - $$f^* = \underset{f}{\operatorname{argmax}}(|f|)$$

Problème de flot maximal dans un graphe

- Algorithme de **Ford-Fulkerson** pour identifier un flot s—p maximal, f, étant donné un graphe orienté $G = (V,E)$ et les capacités c
  - Initialement, on considère le flot f tel que $|f| = 0$

    $\forall (v_i,v_j) \in V^2,\ f(v_i,v_j) = 0$

    $\forall (v_i,v_j) \in V^2,\ c_f(v_i,v_j) = c(v_i,v_j)$
  - Tant qu'il existe un chemin élémentaire $ch = \langle v_0,\dots,v_k \rangle$ dans G_f, $v_0 = s$ et $v_k = p$
    - On mesure c_f la capacité résiduelle du chemin ch et on met à jour le flot et le graphe résiduel

      $\forall (v_i,v_{i+1}),\ i \in [0;k\text{-}1],\ f(v_i,v_{i+1}) = f(v_i,v_{i+1}) + c_f(ch)$

      $\forall (v_i,v_{i+1}),\ i \in [0;k\text{-}1],\ c_f(v_i,v_{i+1}) = c_f(v_i,v_{i+1}) - c_f(ch)$

      $\forall (v_i,v_{i+1}),\ i \in [0;k\text{-}1],\ f(v_{i+1},v_i) = f(v_{i+1},v_i) - c_f(ch)$

      $\forall (v_i,v_{i+1}),\ i \in [0;k\text{-}1],\ c_f(v_{i+1},v_i) = c_f(v_{i+1},v_i) + c_f(ch)$

Problème de flot maximal dans un graphe

- Algorithme de **Ford-Fulkerson** pour identifier un flot s—p maximal, f, étant donné un graphe orienté $G = (V,E)$ et les capacités c
  - Initialeme

    $\forall\, v_i \in$

    $\forall\, (v_i,$

- Typiquement, on utilise le parcours en largeur pour identifier les chemins de s à p
- Lorsque $f(v_i,v_j) = c(v_i,v_j)$, l'arc (v_i,v_j) est **saturé**
- Lorsque $f(v_i,v_j) = 0$, l'arc (v_i,v_j) est **insaturé**

  - Tant qu'il G_f, $v_0 = s$ et $v_k = p$
    - On mes ur le flot et le graphe

      $\forall\, (v_i,v_{i+1}),\, i \in [0;k\text{-}1],\, f(v_i,v_{i+1}) = f(v_i,v_{i+1}) + c_f(ch)$

      $\forall\, (v_i,v_{i+1}),\, i \in [0;k\text{-}1],\, c_f(v_i,v_{i+1}) = c_f(v_i,v_{i+1}) - c_f(ch)$

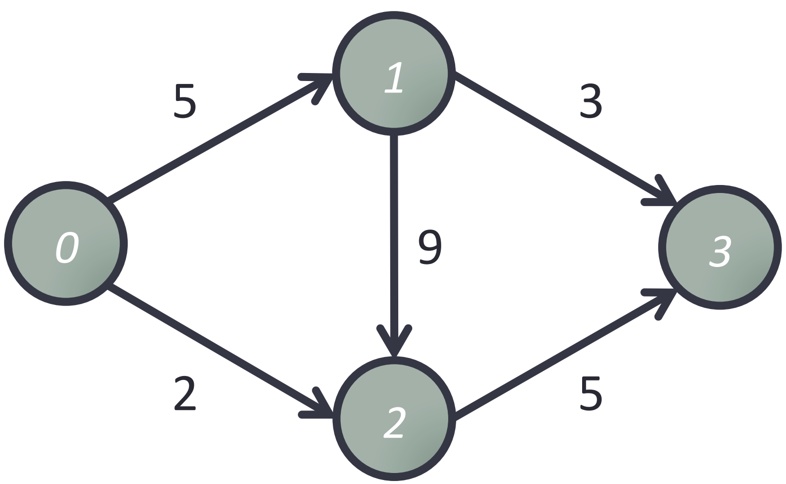
      $\forall\, (v_i,v_{i+1}),\, i \in [0;k\text{-}1],\, f(v_{i+1},v_i) = f(v_{i+1},v_i) - c_f(ch)$

      $\forall\, (v_i,v_{i+1}),\, i \in [0;k\text{-}1],\, c_f(v_{i+1},v_i) = c_f(v_{i+1},v_i) + c_f(ch)$

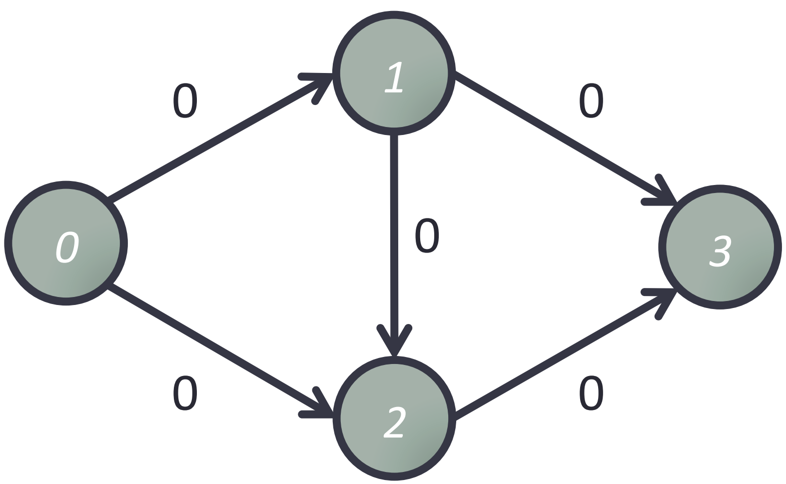
Problème de flot maximal dans un graphe

- Recherche d'un flot maximal dans le graphe ci-dessous, avec pour source le sommet *0* et pour puits le sommet *3*
  - Le graphe résiduel est tracé à gauche
  - Le flot est décrit à droite

  - Initialisation avec le flot f, $|f| = 0$



Graphe résiduel

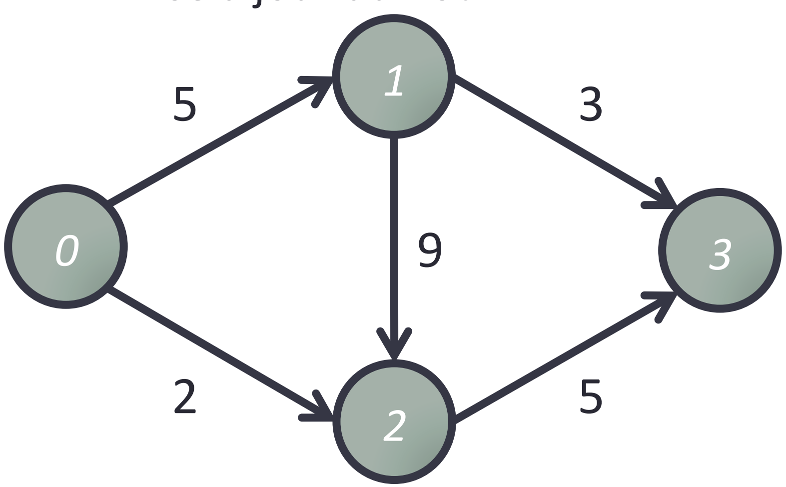


Flot

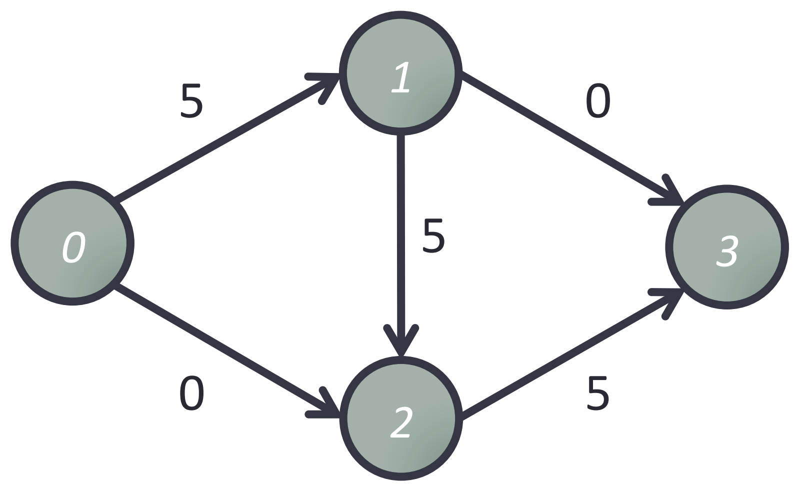
Problème de flot maximal dans un graphe

- Recherche d'un flot maximal dans le graphe ci-dessous, avec pour source le sommet *0* et pour puits le sommet *3*
  - Le graphe résiduel est tracé à gauche
  - Le flot est décrit à droite

  - Premier chemin : *ch* = <0,1,2,3> , $c_f(ch)$ = 5
    - Mise à jour du flot



Graphe résiduel

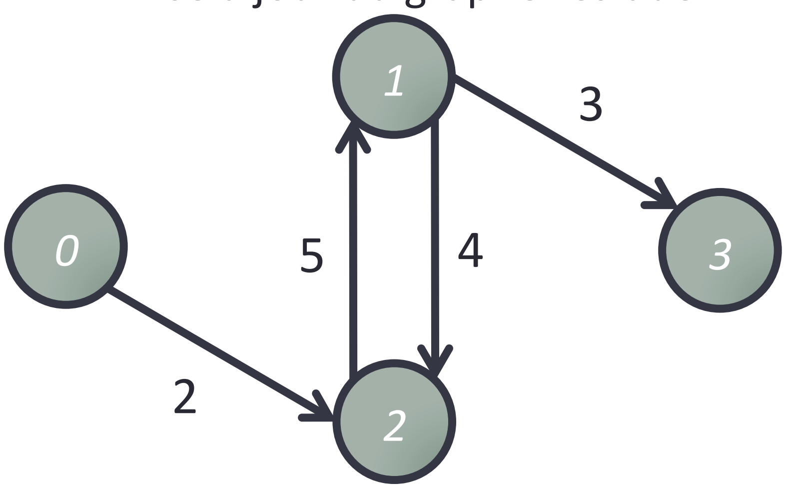


Flot

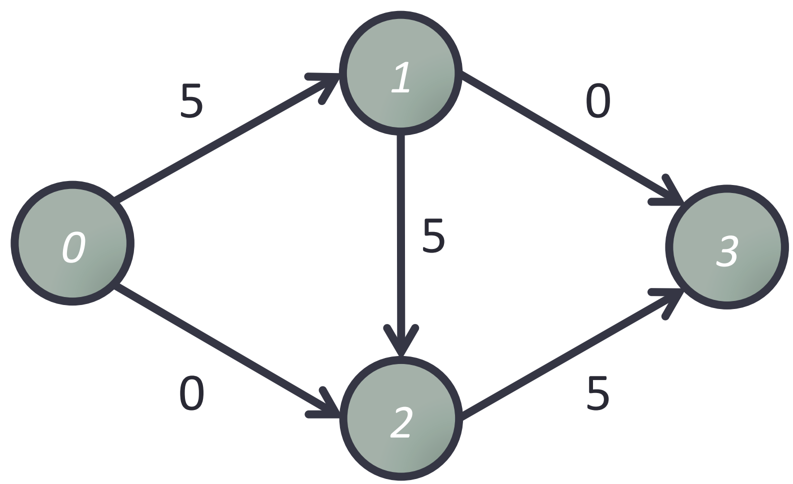
Problème de flot maximal dans un graphe

- Recherche d'un flot maximal dans le graphe ci-dessous, avec pour source le sommet *0* et pour puits le sommet *3*
  - Le graphe résiduel est tracé à gauche
  - Le flot est décrit à droite

  - Premier chemin : *ch* = <0,1,2,3> , $c_f(ch)$ = 5
    - Mise à jour du graphe résiduel



Graphe résiduel

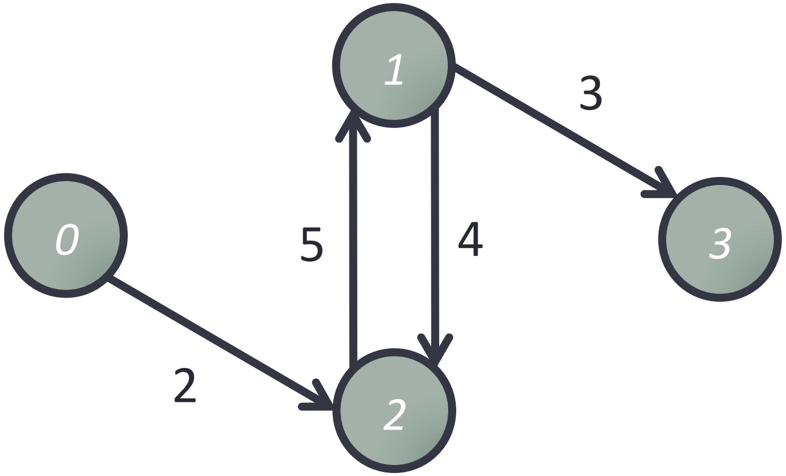


Flot

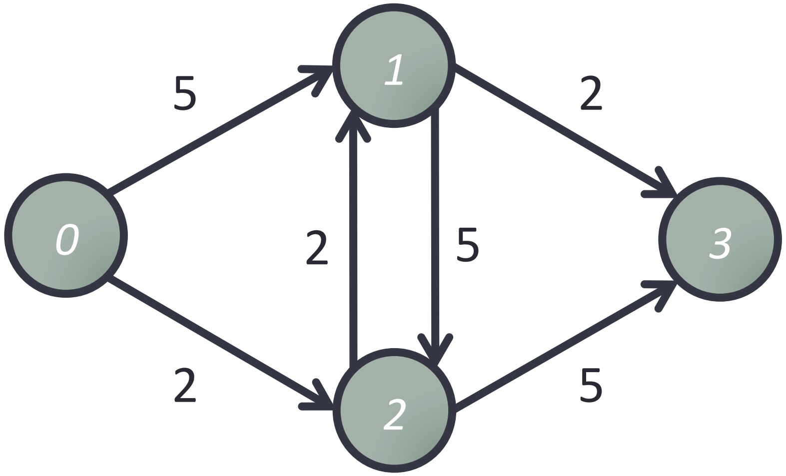
Problème de flot maximal dans un graphe

- Recherche d'un flot maximal dans le graphe ci-dessous, avec pour source le sommet *0* et pour puits le sommet *3*
  - Le graphe résiduel est tracé à gauche
  - Le flot est décrit à droite

  - Deuxième chemin : *ch* = <0,2,3> , $c_f(ch) = 2$
    - Mise à jour du flot



Graphe résiduel

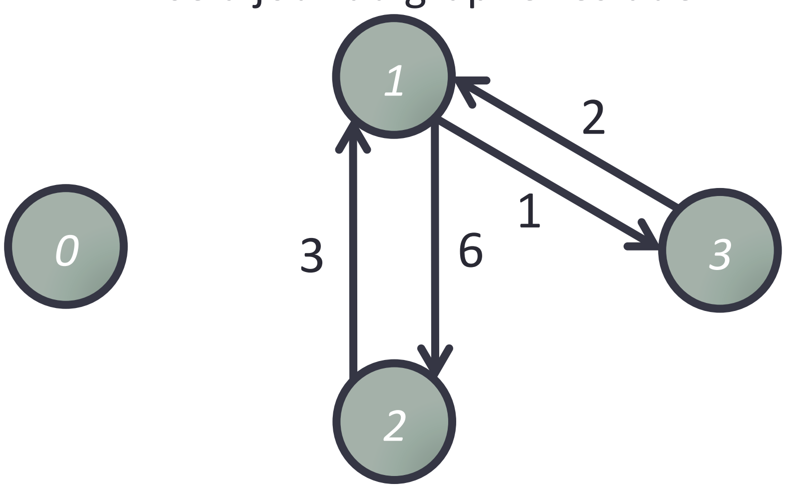


Flot

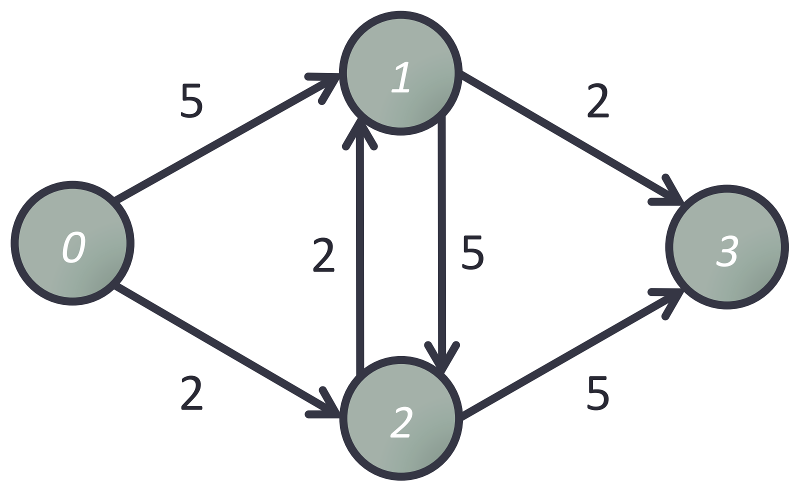
Problème de flot maximal dans un graphe

- Recherche d'un flot maximal dans le graphe ci-dessous, avec pour source le sommet *0* et pour puits le sommet *3*
  - Le graphe résiduel est tracé à gauche
  - Le flot est décrit à droite

  - Deuxième chemin : ch = <0,2,3> , $c_f(ch) = 2$
    - Mise à jour du graphe résiduel



Graphe résiduel

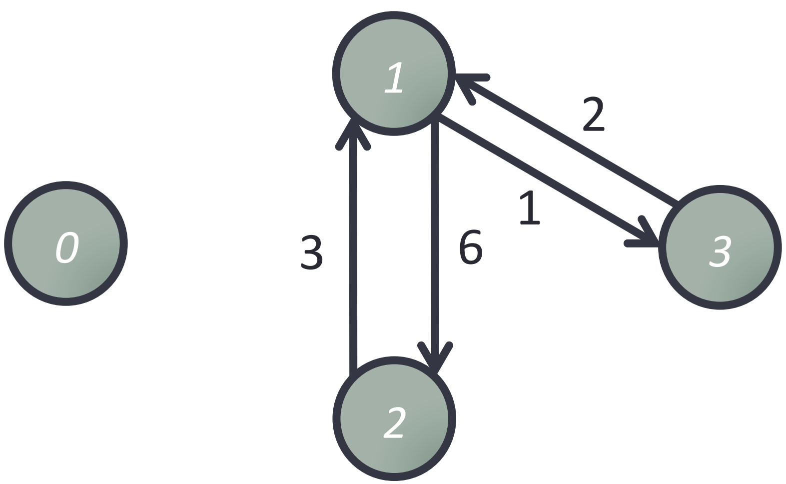


Flot

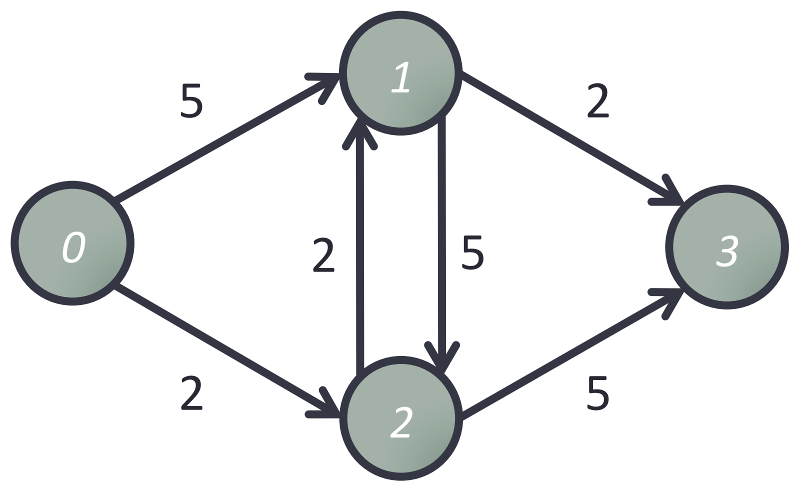
Problème de flot maximal dans un graphe

- Recherche d'un flot maximal dans le graphe ci-dessous, avec pour source le sommet *0* et pour puits le sommet *3*
  - Le graphe résiduel est tracé à gauche
  - Le flot est décrit à droite

  - On a trouvé un flot maximal, *f* ayant pour valeur |*f*| = 7



Graphe résiduel



Flot

Modéliser les conflits dans un réseau social (II)

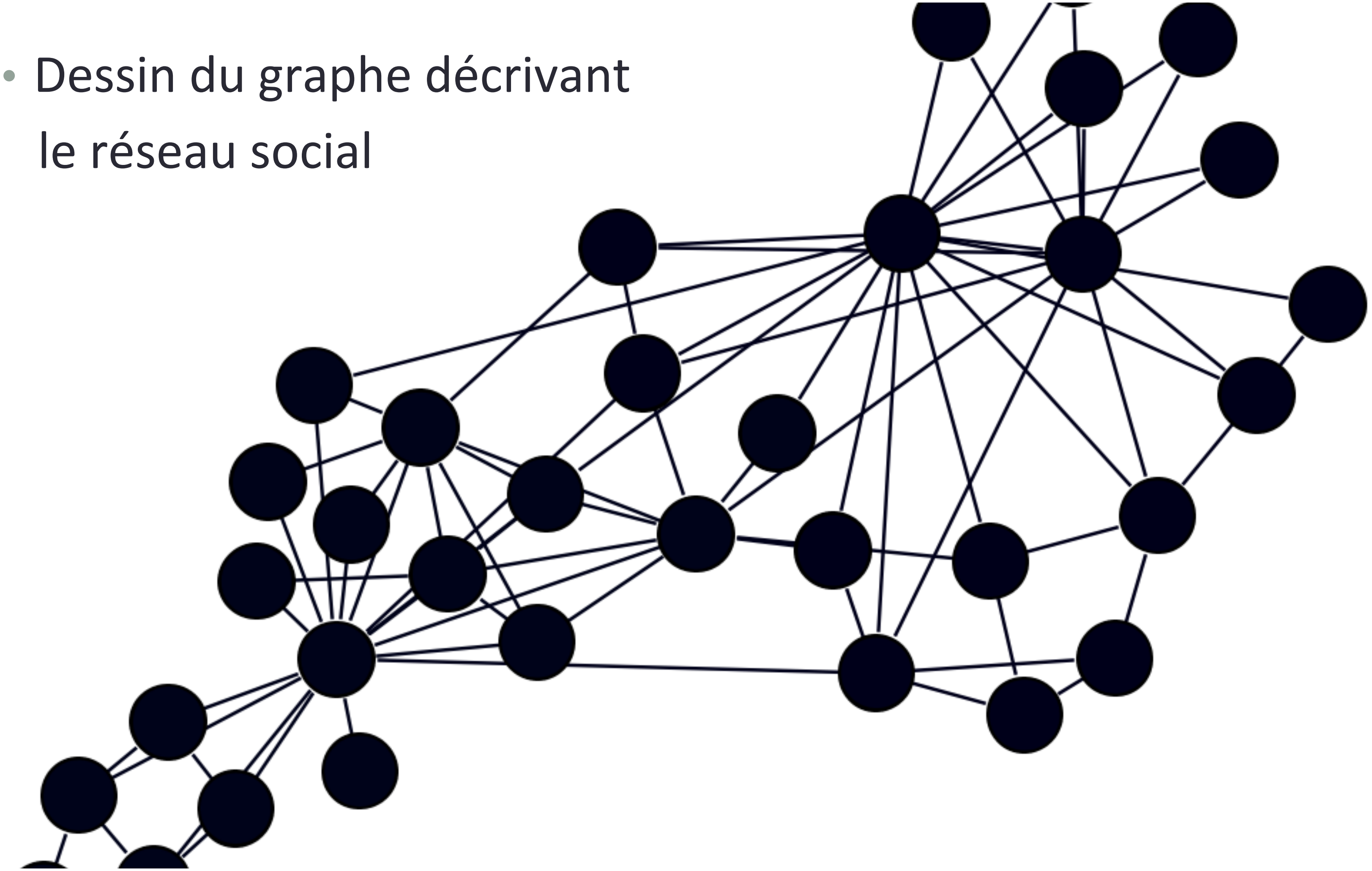
- Dans les années 70, l'anthropologue Wayne W. Zachary s'intéresse à la modélisation et à la prévision des conflits et des scission au sein de petits groupes de personnes

  - Pour valider son approche, il s'intéresse à 34 membres d'un club de karaté d'une université américaine. Pour chaque paire de membres, il compte le nombre de contextes dans lesquels ils interagissent (au plus 8)
    - Interaction à la cafétéria du campus
    - Interaction au bar étudiant du campus
    - Participation à un même tournoi de karaté
    - *etc.*

  - Il calcule le flot maximal entre le sommet source *0* et le sommet puits *33,* avec pour capacités les nombres d'interactions entre les membres connectés dans le réseau social

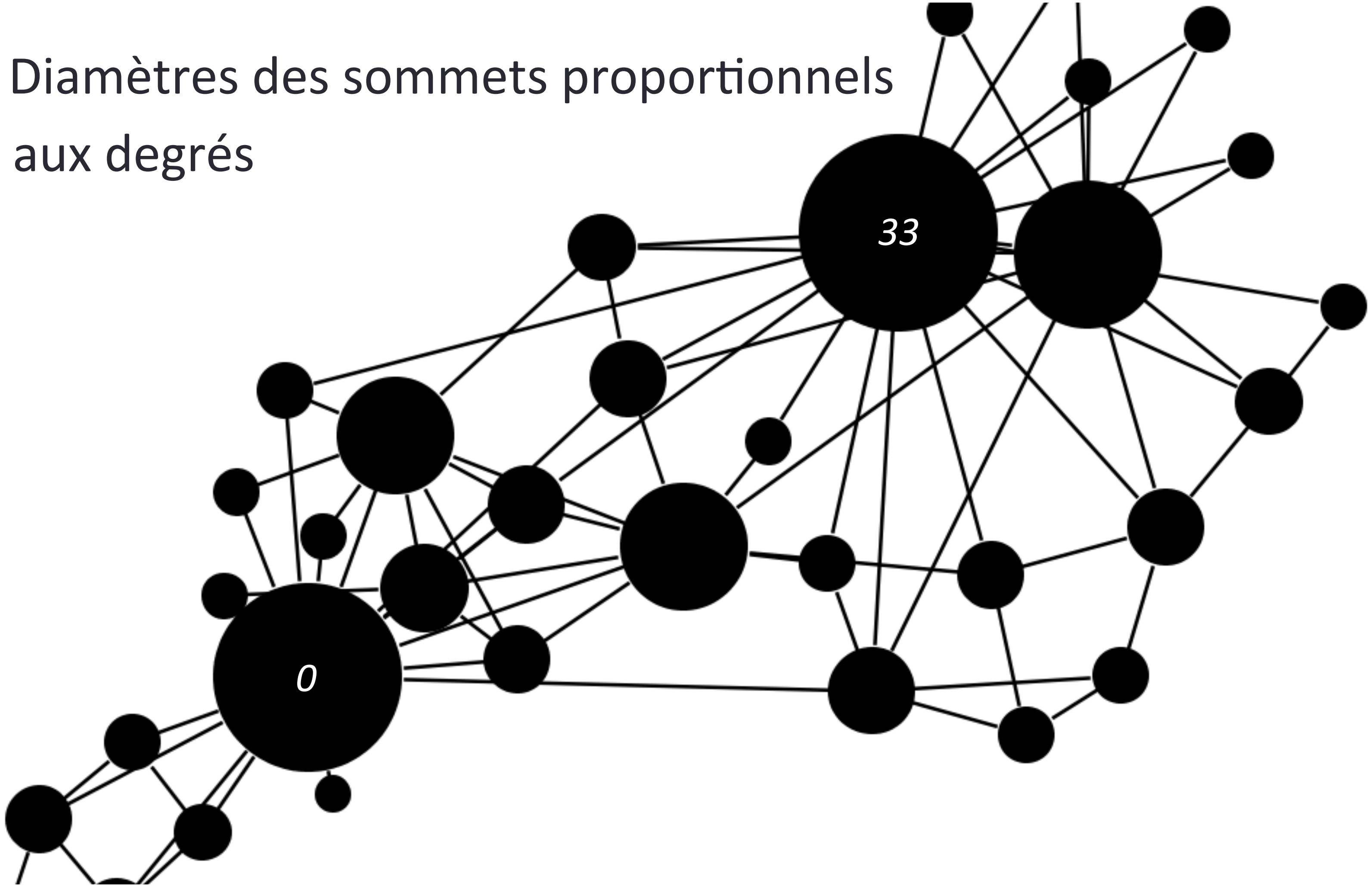
Modéliser les conflits dans un réseau social (II)

- Dessin du graphe décrivant le réseau social



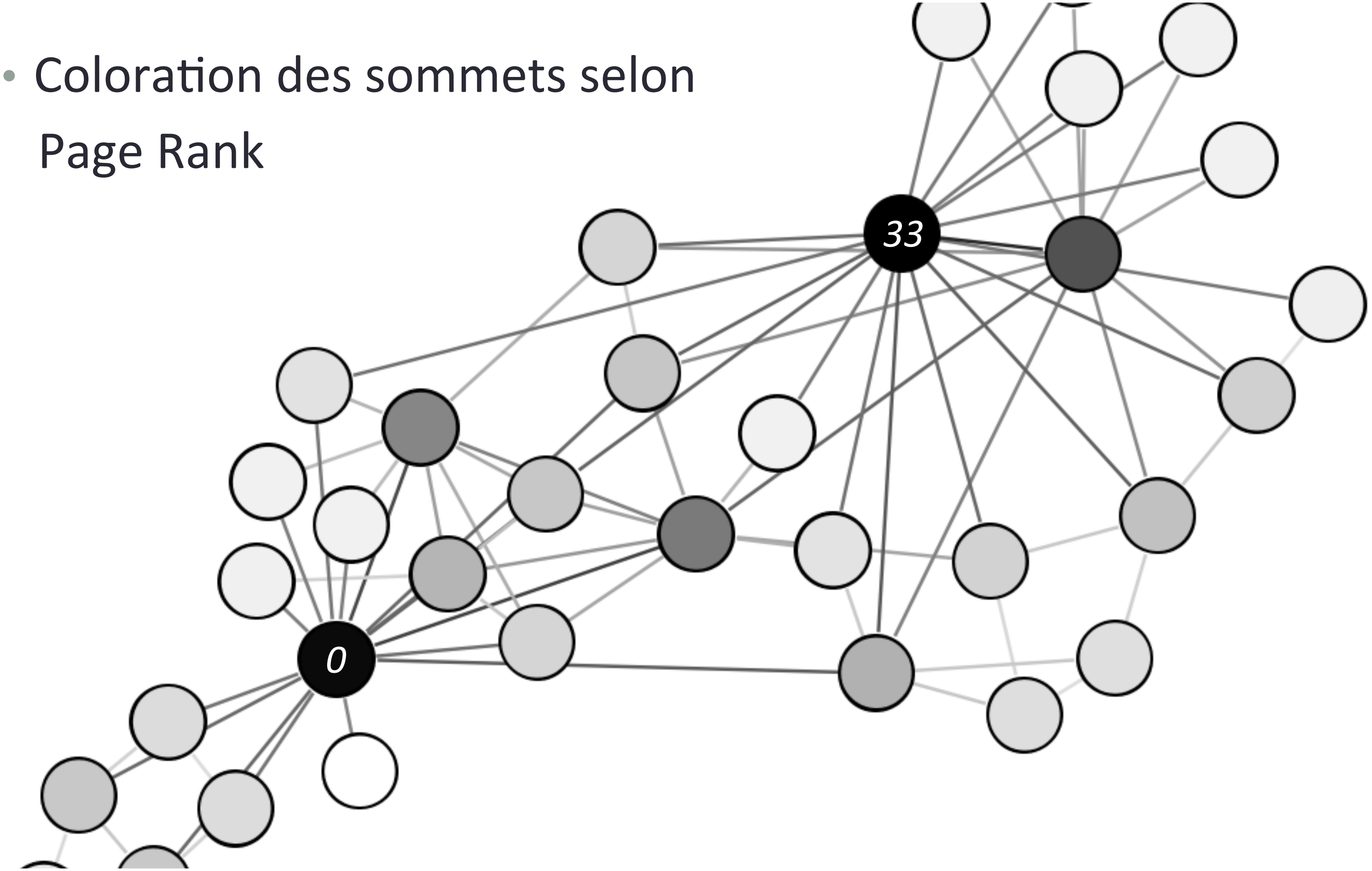
Modéliser les conflits dans un réseau social (II)

- Diamètres des sommets proportionnels aux degrés



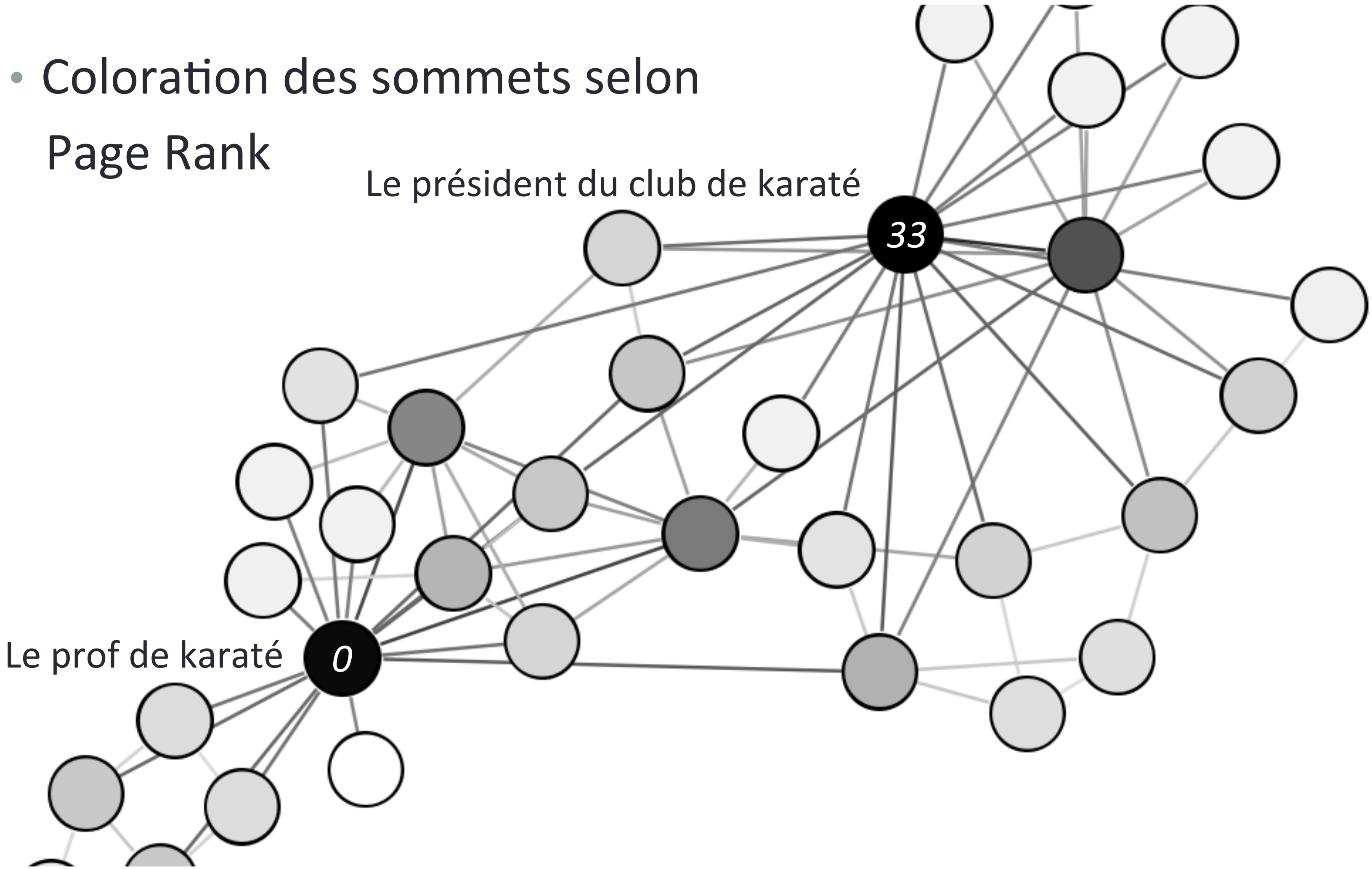
Modéliser les conflits dans un réseau social (II)

- Coloration des sommets selon Page Rank



Modéliser les conflits dans un réseau social (II)

- Coloration des sommets selon Page Rank



Modéliser les conflits dans un réseau social (II)

- Dans les années 70, l'anthropologue Wayne W. Zachary s'intéresse à la modélisation et à la prévision des conflits et des scission au sein de petits groupes de personnes
  - Il calcule le flot maximal entre le sommet source *0* et le sommet puits *33,* avec pour capacités les nombres d'interactions entre les membres connectés dans le réseau social
    - Il choisit ces sommets car le sommet 0 correspond au professeur de karaté, le sommet 33 au président du club
    - Avec la méthode Page Rank, on identifie ces deux sommets comme étant les plus influents au sein de ce réseau social
  - Il formule ensuite le problème de prévision de la scission du club de karaté comme un problème de **coupe minimale**

Problème de coupe minimale dans un graphe

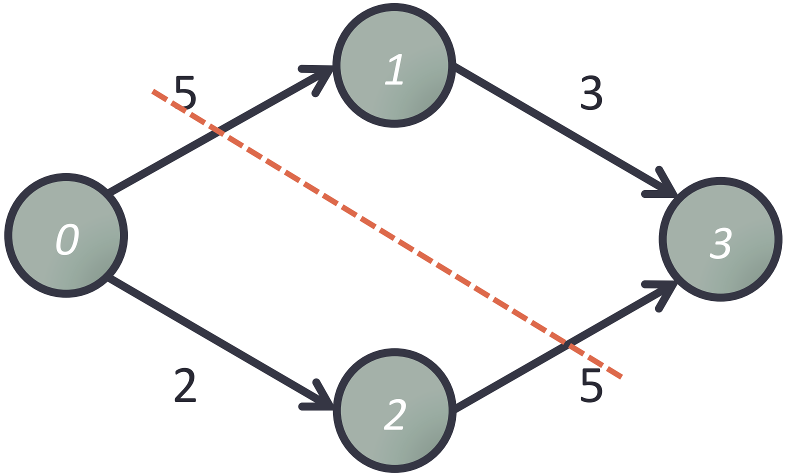
- Étant donné un graphe $G = (V,E)$, une fonction $c : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, le sommet source s et le sommet puits p, une **coupe** (S,P) est une partition des sommets en deux sous-ensembles, telle que
  - $V = S \cup P$, *i.e.* l'union de S et P donne l'ensemble des sommets V
  - $S \cap \mathrm{P} = \varnothing$, *i.e.* l'intersection de S et P donne l'ensemble vide
  - $s \in S$, *i.e.* la source appartient à S
  - $p \in P$, *i.e.* le puits appartient à P

- La capacité d'une coupe (S,P) est la somme des capacités des arcs de S vers P
  - $c(S,P) = \sum_{\substack{v_i \in S \\ v_j \in P}} c(v_i, v_j)$

Problème de coupe minimale dans un graphe

- Étant donné un graphe $G = (V,E)$, une fonction $c : V^2 \rightarrow R^+$, le sommet source s et le sommet puits p, une **coupe** (S,P) est une partition des sommets en deux sous-ensembles, telle que
  - $V = S \cup P$, *i.e.* l'union de S et P donne l'ensemble des sommets V
  - $S \cap P = \varnothing$, *i.e.* l'intersection de S et P donne l'ensemble vide
  - $s \in S$, *i.e.* la source appartient à S
  - $p \in P$, *i.e.* le puits appartient à P

- Soit le graphe valué ci-contre
  - $s = 0$ et $p = 3$
  - $S = \{0,2\}$ et $P = \{1,3\}$
  - (S,P) est une coupe de capacité 10



Problème de coupe minimale dans un graphe

- Étant donné un graphe $G = (V,E)$, une fonction $c : V^2 \rightarrow R^+$, le sommet source s et le sommet puits p, une **coupe** (S,P) est une partition des sommets en deux sous-ensembles, telle que
  - $V = S \cup P$, *i.e.* l'union de S et P donne l'ensemble des sommets V
  - $S \cap \mathrm{P} = \varnothing$, *i.e.* l'intersection de S et P donne l'ensemble vide
  - $s \in S$, *i.e.* la source appartient à S
  - $p \in P$, *i.e.* le puits appartient à P

- Pour tout flot f et pour toute coupe (S,P)
  - La valeur du flot f est inférieure ou égale à la capacité de la coupe (S,P)

$$|f| \leq c(S,P)$$

Problème de coupe minimale dans un graphe

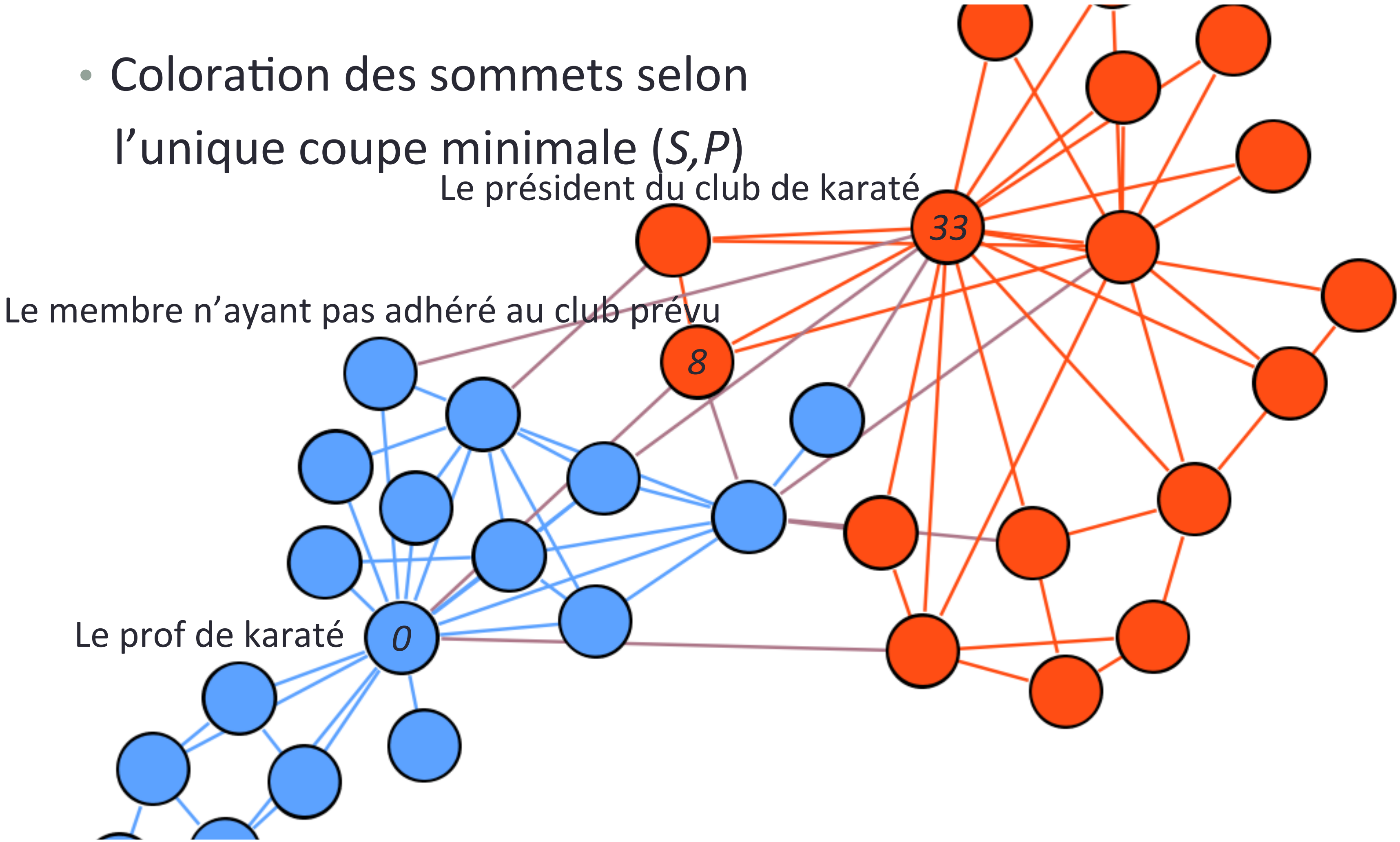
- Étant donné un graphe $G = (V,E)$, une fonction $c : V^2 \rightarrow R^+$, le sommet source s et le sommet puits p, une **coupe** (S,P) est une partition des sommets en deux sous-ensembles, telle que
  - $V = S \cup P$, *i.e.* l'union de S et P donne l'ensemble des sommets V
  - $S \cap \mathrm{P} = \varnothing$, *i.e.* l'intersection de S et P donne l'ensemble vide
  - $s \in S$, *i.e.* la source appartient à S
  - $p \in P$, *i.e.* le puits appartient à P

- Étant donné le flot f, le problème de coupe minimale consiste à
  - Identifier une coupe (S,P) telle que sa capacité soit minimale

$$(S,P)^* = \underset{(S,P)}{\mathrm{argmin}}(c(S,P))$$

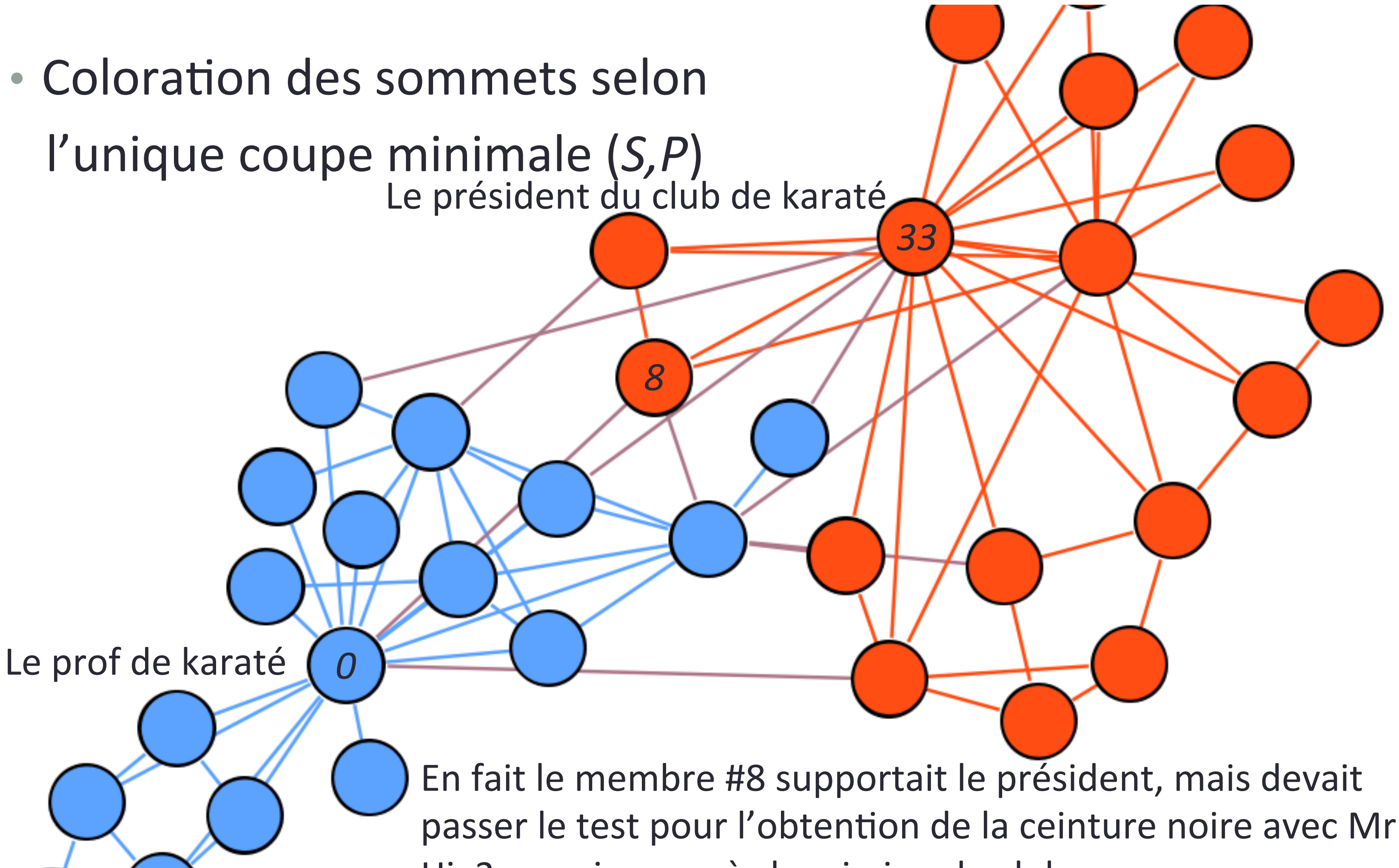
Modéliser les conflits dans un réseau social (III)

- Coloration des sommets selon l'unique coupe minimale (S,P)



Modéliser les conflits dans un réseau social (III)

- Coloration des sommets selon l'unique coupe minimale (S,P)



En fait le membre #8 supportait le président, mais devait passer le test pour l'obtention de la ceinture noire avec Mr. Hi, 3 semaines après la scission du club…

Notations

- Ensemble
  - $\varnothing$: L'ensemble vide
  - $S = \{ x_1, x_2, x_3 \}$: L'ensemble contenant les éléments x_1, x_2 *et* x_3
  - $|S|$: La cardinalité de l'ensemble S
  - $x \in S$: L'élément x appartient à l'ensemble S
  - $x \notin S$: L'élément x n'appartient pas à l'ensemble S
  - $A \subset B$: L'ensemble A est inclus dans l'ensemble B
  - $A \cup B$: L'union des ensembles A et B
  - $A \cap B$: L'intersection des ensembles A et B

- Arithmétique
  - $\sum_{i=1}^{3} x_i$: la somme des éléments x_i, i allant de 1 à 3, *i.e.* $\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$

Références

- Théorie des graphes et optimisation dans les graphes. Christine Solnon
  - Accessible en ligne http://liris.cnrs.fr/csolnon/polyGraphes.pdf
- Mathematics for Computer Science - Graph Theory. MIT Course Number 6.042J / 18.062J, Eric Lehman, Tom Leighton, and Albert Meyer
  - Accessible en ligne http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-042j-mathematics-for-computer-science-fall-2010/index.htm
- Graphes et algorithmes (4ème édition). Michel Gondran et Michel Minoux. Lavoisier, 2009.
  - Disponible à la BU Chevreul